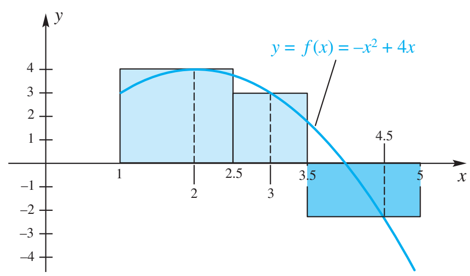
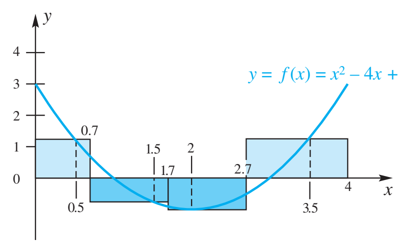
Conjunto de problemas 4.2

En los problemas 1 y 2 calcule la suma de Riemann que se sugiere para cada figura.

1.



2.



En los problemas del 3 al 6 calcule la suma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\,\Delta x_i$ *para los datos que se dan.*

3. $f(x) = x - 1;\ P: 3 < 3.75 < 4.25 < 5.5 < 6 < 7;$ $\overline{x}_1 = 3, \overline{x}_2 = 4, \overline{x}_3 = 4.75, \overline{x}_4 = 6, \overline{x}_5 = 6.5$

4. $f(x) = -x/2 + 3;\ P: -3 < -1.3 < 0 < 0.9 < 2;$ $\overline{x}_1 = -2, \overline{x}_2 = -0.5, \overline{x}_3 = 0, \overline{x}_4 = 2$

C **5.** $f(x) = x^2/2 + x$; $[-2, 2]$ se dividió en ocho subintervalos iguales, $\overline{x}_i$ es el punto medio.

C **6.** $f(x) = 4x^3 + 1$; $[0, 3]$ se dividió en seis subintervalos iguales, $\overline{x}_i$ es el punto del extremo derecho.

En los problemas del 7 al 10 utilice los valores que se dan de a y b y exprese el límite dado como una integral definida.

7. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i)^3\,\Delta x_i;\ a = 1, b = 3$

8. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\overline{x}_i + 1)^3\,\Delta x_i;\ a = 0, b = 2$

9. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{x}_i^2}{1 + \overline{x}_i}\,\Delta x_i;\ a = -1, b = 1$

10. $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{sen} \overline{x}_i)^2\,\Delta x_i;\ a = 0, b = \pi$

≈ *En los problemas del 11 al 16 evalúe las integrales definidas con el uso de la definición, como en los ejemplos 3 y 4.*

11. $\int_0^2 (x + 1)\,dx$ **12.** $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

Sugerencia: utilice $\overline{x}_i = 2i/n$.

13. $\int_{-2}^{1} (2x + \pi)\,dx$ **14.** $\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2)\,dx$

Sugerencia: utilice $\overline{x}_i = -2 + 3i/n$.

15. $\int_0^5 (x + 1)\,dx$ **16.** $\int_{-10}^{10} (x^2 + x)\,dx$

En los problemas del 17 al 22, por medio de la propiedad aditiva para intervalos y las fórmulas adecuadas para áreas de la geometría plana, calcule $\int_a^b f(x)\,dx$*, donde a y b son los extremos izquierdo y derecho para los cuales f está definida. Comience por elaborar una gráfica de la función que se da.*

17. $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ x & \text{si } 2 < x \le 5 \end{cases}$

18. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2(x - 1) + 2 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

19. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \le 2 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{4 - x^2} & \text{si } -2 \le x \le 0 \\ -2x - 2 & \text{si } 0 < x \le 2 \end{cases}$

21. $f(x) = \sqrt{A^2 - x^2};\ -A \le x \le A$

22. $f(x) = 4 - |x|,\ -4 \le x \le 4$

En los problemas del 23 al 26 se da la función velocidad para un objeto. Suponiendo que el objeto está en el origen en el instante $t = 0$, determine la posición en el instante $t = 4$.

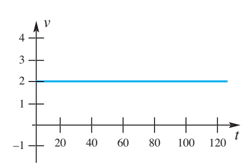
23. $v(t) = t/60$ **24.** $v(t) = 1 + 2t$

25. $v(t) = \begin{cases} t/2 & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 1 & \text{si } 2 < t \le 4 \end{cases}$

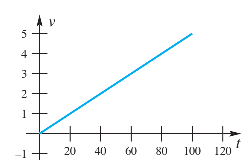
26. $v(t) = \begin{cases} \sqrt{4 - t^2} & \text{si } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{si } 2 < t \le 4 \end{cases}$

En los problemas del 27 al 30 se graficó la función velocidad de un objeto. Utilice esta gráfica para determinar la posición del objeto en los instantes $t = 20, 40, 60, 80, 100$ y 120, suponiendo que el objeto está en el origen en el instante $t = 0$.

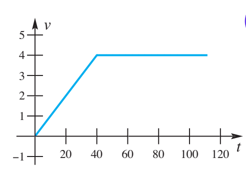
27.



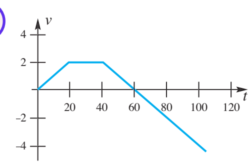
28.



29.



30.



31. Recuerde que $[\![x]\!]$ denota el mayor entero que es menor o igual a x. Calcule cada una de las integrales que están a continuación. Puede utilizar razonamiento geométrico y el hecho de que $\int_0^b x^2\,dx = b^3/3$. (Esto último se demuestra en el problema 34.)

(a) $\int_{-3}^{3} [\![x]\!]\,dx$ (b) $\int_{-3}^{3} [\![x]\!]^2\,dx$

(c) $\int_{-3}^{3} (x - [\![x]\!])\,dx$ (d) $\int_{-3}^{3} (x - [\![x]\!])^2\,dx$

(e) $\int_{-3}^{3} |x|\, dx$ (f) $\int_{-3}^{3} x|x|\, dx$

(g) $\int_{-1}^{2} |x|[\![x]\!]\, dx$ (h) $\int_{-1}^{2} x^2[\![x]\!]\, dx$

32. Sea f una función impar y g una función par, y suponga que $\int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx = 3$. Utilice un razonamiento geométrico para calcular cada una de las siguientes integrales:

(a) $\int_{-1}^{1} f(x)\, dx$ (b) $\int_{-1}^{1} g(x)\, dx$

(c) $\int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$ (d) $\int_{-1}^{1} [-g(x)]\, dx$

(e) $\int_{-1}^{1} xg(x)\, dx$ (f) $\int_{-1}^{1} f^3(x)g(x)\, dx$

33. Demuestre que $\int_a^b x\, dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ al completar el siguiente argumento. Para la partición $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, elíjase $\overline{x}_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$. Entonces, $R_P = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i\, \Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$. Ahora simplifíquese R_P (suma telescópica) y tómese el límite.

34. Demuestre que $\int_a^b x^2\, dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$ por medio de un argumento parecido al del problema 33, pero utilizando $\overline{x}_i = \left[\frac{1}{3}(x_{i-1}^2 + x_{i-1}x_i + x_i^2)\right]^{1/2}$. Suponga que $0 \le a < b$.

CAS *Muchos sistemas de álgebra computacional (CAS, del inglés computer algebra sistem) permiten la evaluación de sumas de Riemann para la evaluación de los puntos frontera izquierdo, frontera derecho o medio. Mediante tal sistema, en los problemas del 35 al 38 evalúe las sumas de Riemann con 10 subintervalos utilizando evaluaciones de los puntos izquierdo, derecho y medio.*

35. $\int_0^2 (x^3 + 1)\, dx$ **36.** $\int_0^1 \tan x\, dx$

37. $\int_0^1 \cos x\, dx$ **38.** $\int_1^3 (1/x)\, dx$

39. Demuestre que la función f, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es integrable en [0, 1]. *Sugerencia:* demuestre que no importa qué tan pequeña sea la norma de la partición $\|P\|$,la suma de Riemann puede hacerse que tenga el valor 0 o 1.

Respuestas a la revisión de conceptos: **1.** suma de Riemann **2.** integral definida; $\int_a^b f(x)\, dx$ **3.** $A_{\text{arriba}} - A_{\text{abajo}}$ **4.** $\frac{15}{2}$.

4.3 El Primer Teorema Fundamental del Cálculo

El cálculo es el estudio de límites y, hasta ahora, la derivada y la integral definida son los dos límites más importantes que hemos estudiado. La derivada de una función f es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

y la integral definida es

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x}_i)\, \Delta x_i$$

Parece que estas dos clases de límites no tienen relación entre sí. Sin embargo, hay una conexión muy estrecha, como lo veremos en esta sección.

Es habitual que a Newton y Leibniz se les atribuya el descubrimiento del cálculo de manera simultánea, aunque independiente. No obstante, los conceptos de la pendiente de una recta tangente (que condujo a la derivada) se conocían desde un tiempo anterior a ellos, pues fue estudiado por Blaise Pascal e Isaac Barrow años antes que Newton y Leibniz. Y Arquímedes había estudiado áreas de regiones curvas 1800 años antes, en el siglo III a. C. Entonces, ¿por qué se les adjudica el crédito a Newton y Leibniz? Ellos entendieron y explotaron la íntima relación entre antiderivadas e integrales definidas. Esta importante relación se denomina *Primer Teorema Fundamental del Cálculo.*

Primer Teorema Fundamental del Cálculo En su carrera de matemático ha encontrado varios "teoremas fundamentales". El *Primer Teorema Fundamental de la Aritmética* dice que un número entero se factoriza de manera única como un producto de primos. El *Teorema Fundamental del Álgebra* dice que un polinomio de grado n tiene n raíces, contando las raíces complejas y las multiplicidades. Cualquier "teorema fundamental" debe estudiarse con cuidado y luego consignarlo de manera permanente en la memoria.